

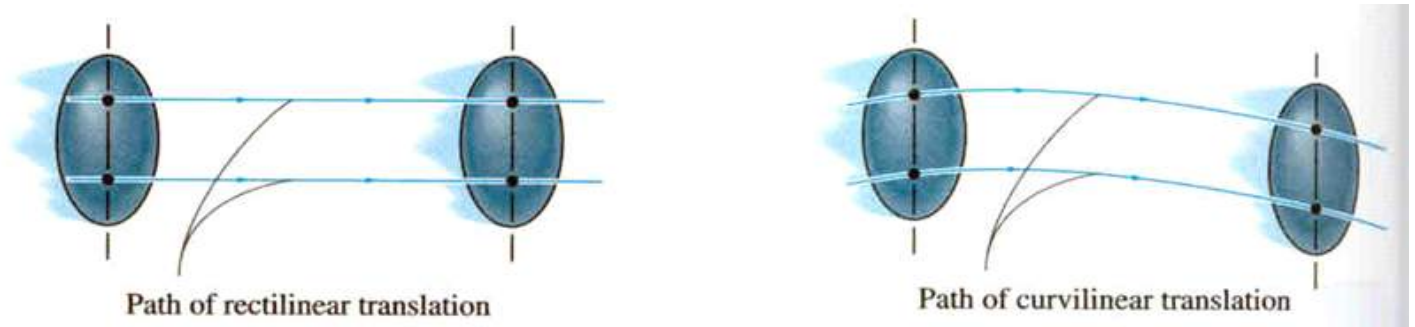
강체의 평면운동학

1. 강체 운동의 종류

- **강체(rigid body)**는 변형되지 않거나 모양이 바뀌지 않는 물체를 이상적으로 모델링한 것이다. 좀 더 엄밀하게 말하면, 강체의 모든 점들 사이의 거리는 일정하게 유지된다. 어떤 물체라도 움직임에 따라 변형을 하기는 하지만, 그 변형이 충분히 작다면, 강체로 모델링하여 물체의 운동을 근사화할 수 있다. 예를 들어 고적대 지휘자의 지휘봉은 강체로 모델링할 수 있으나, 낚싯대는 강체로 모델링할 수 없다.

(1) 병진운동(Translation)

주어진 기준좌표계에 대해 강체가 회전을 하지 않고 운동하는 경우, 병진운동을 한다고 한다. 병진운동을 하는 강체의 모든 점은 동일한 속도와 가속도를 가지므로, 강체의 한 점의 운동만 기술하면 강체의 운동을 완전히 기술할 수 있다.



강체 운동의 예: (a) 병진운동을 하는 물체는 회전을 하지 않는다. (b) 그네의 좌석은 병진운동으로 수평을 유지한다.

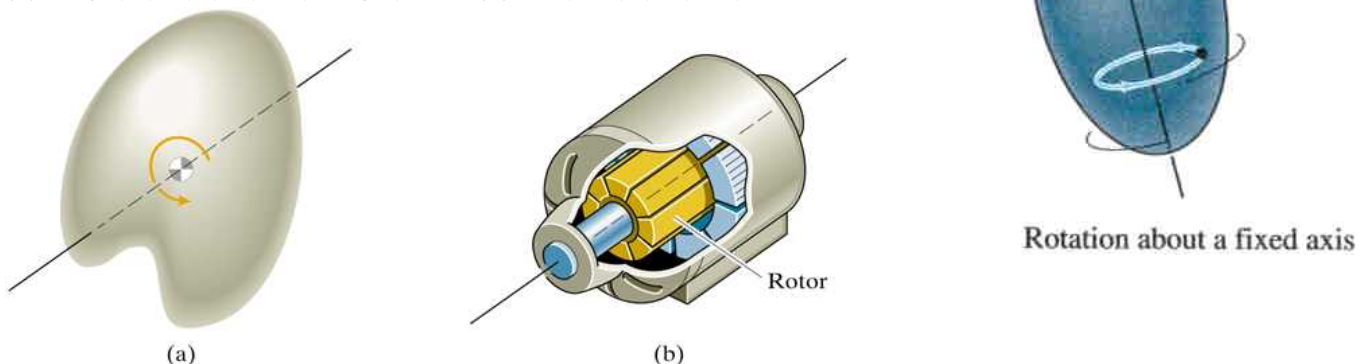


(2) 고정축에 대한 회전(Rotation about fixed axis)

주어진 기준좌표계에 대해 고정된 축을 중심으로 한 회전운동
축 상에 있는 강체의 점들은 움직이지 않으며, 축 상에 있지 않은 점들은 강체가 회전함에 따라 축에 대해 원형 경로를 그리며 움직인다.

고정축 회전운동의 예:

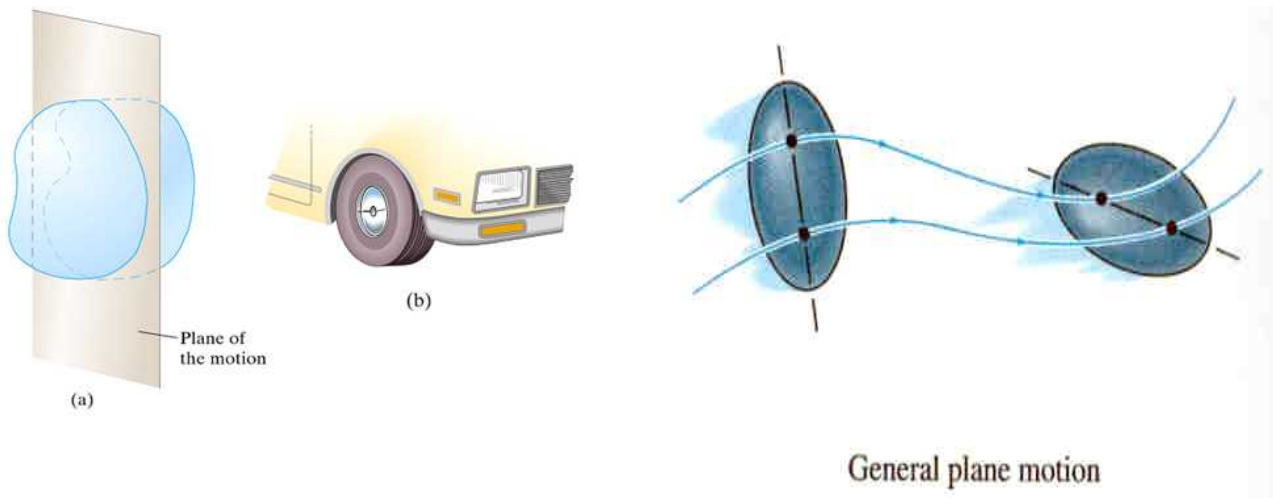
(a) 고정축에 대해 회전하는 강체, (b) 전기모터의 회전자



(3) 평면 운동(Planar Motion)

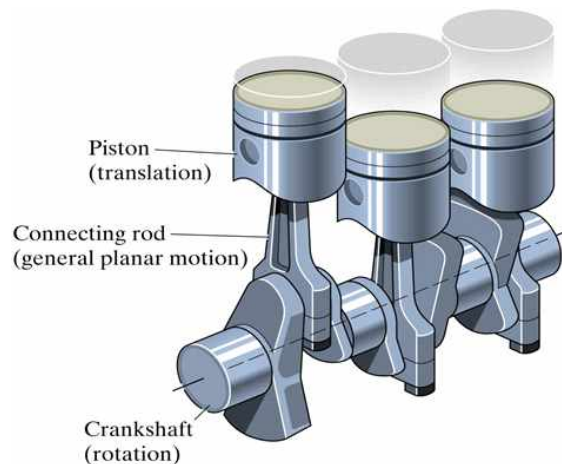
주어진 기준좌표계에 대해 고정된 한 평면과 이 평면을 지나가는 강체에 대해, 평면과 강체의 교차점들이 평면 상에서만 움직인다면, 이 강체는 2차원 또는 평면운동을 한다고 하며, 이 고정평면을 운동평면(plane of motion)이라고 한다. 고정축에 대한 강체의 회전운동은 평면운동의 특별한 경우이다.

평면운동의 예: 자동차가 직선 경로로 움직일 때 차 바퀴는 평면운동을 한다.



엔진에 고정된 기준좌표계에 대해, 피스톤은 실린더 내에서 병진운동을 한다.

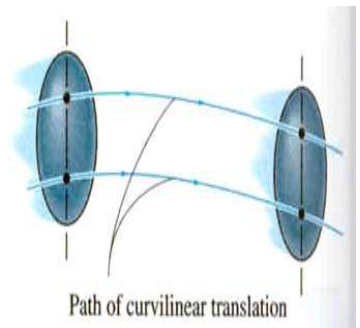
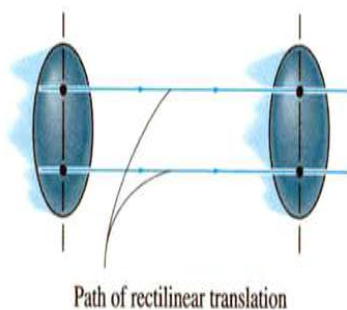
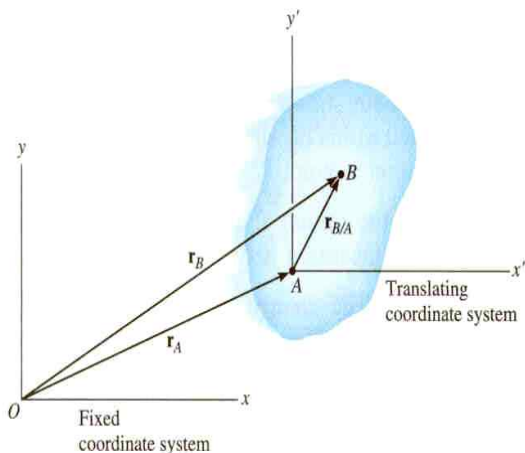
커넥팅 로드는 일반 평면운동하며, 크랭크축은 고정축에 대한 회전운동을 한다.



2. 강체 운동의 해석

(1) 병진 운동(Translation): 위치, 속도, 가속도

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A$$



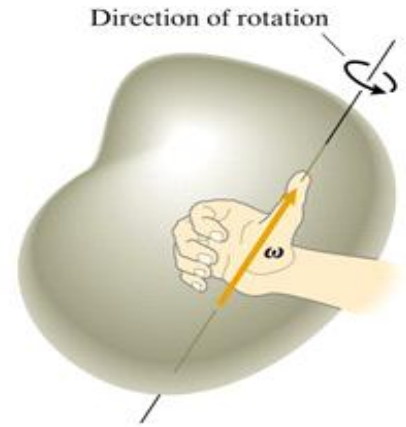
(2) 고정 축에 대한 회전운동

(가) 속도 해석

- 각속도 벡터의 정의 : ω 는 순간 회전축의 방향과 각속도를 모두 정의한다.

각속도 벡터는 순간 회전축과 평행하며 크기는 회전을 $\frac{d\omega}{dt}$ 와 같다.

오른손 엄지손가락이 각속도 벡터를 가리키도록 했을 때 나머지 손가락이 감싸 쥐는 방향이 강체의 회전방향이다.

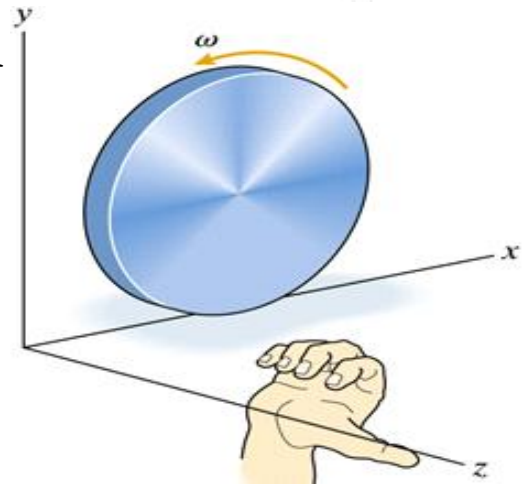


- 왼쪽으로 각속도 ω 로 굴러가는 원판의 각속도 벡터 :

$$\omega = \omega \mathbf{k}$$

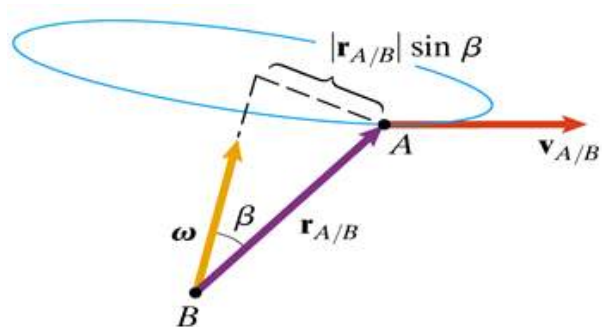
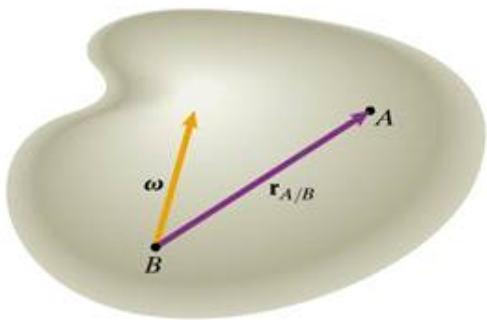
※ 각속도의 방향: z 축 방향, 즉 \mathbf{k} (단위벡터)로 오른손 법칙을 사용할 경우 엄지 손가락의 방향이다.

각속도의 크기는 ω 이다.



- 강체 위의 두 점의 속도 관계 : B점을 기준(중심)으로 한 A점의 속도

$$\mathbf{v}_{A/B} = \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$$



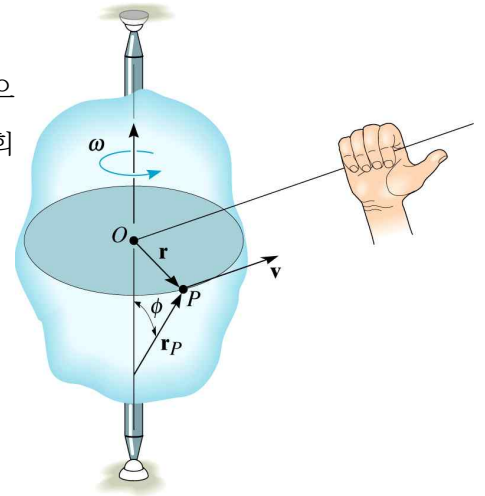
증명) 점A는 B에 대해 반경이 $|r_{A/B}| \sin \beta$ 인 원을 따라 운동하므로, B에 대한 A의 속도는 크기가 $|v_{A/B}| = |r_{A/B}| \sin \beta \times \omega$ 이고 $\vec{\omega}$ 와 $\vec{r}_{A/B}$ 에 수직인 방향을 갖는다. 따라서 $\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$ 이다. 여기서 β 는 벡터 $\vec{r}_{A/B}$ 와 $\vec{\omega}$ 사이의 각이다.

강체 위의 두 점 A와 B의 속도 관계식 :
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \underbrace{\omega \times \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{v}_{A/B}}$$

만일 고정축 즉 B 점이 고정($\vec{v}_B = 0$) 일 때
$$\mathbf{v}_{A/B} = \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$$

[참조] 물체 위의 점 P의 속도 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$

※ 주의 할 사항 : ① ω 의 방향은 오른손 법칙에 의거 회전축을 오른손으로 감싸 켜 상태에서 엄지손가락 방향인 위 방향 임. ② \vec{r} 는 물체의 회전축으로부터 P점까지의 어떤(모든) 위치벡터 임.

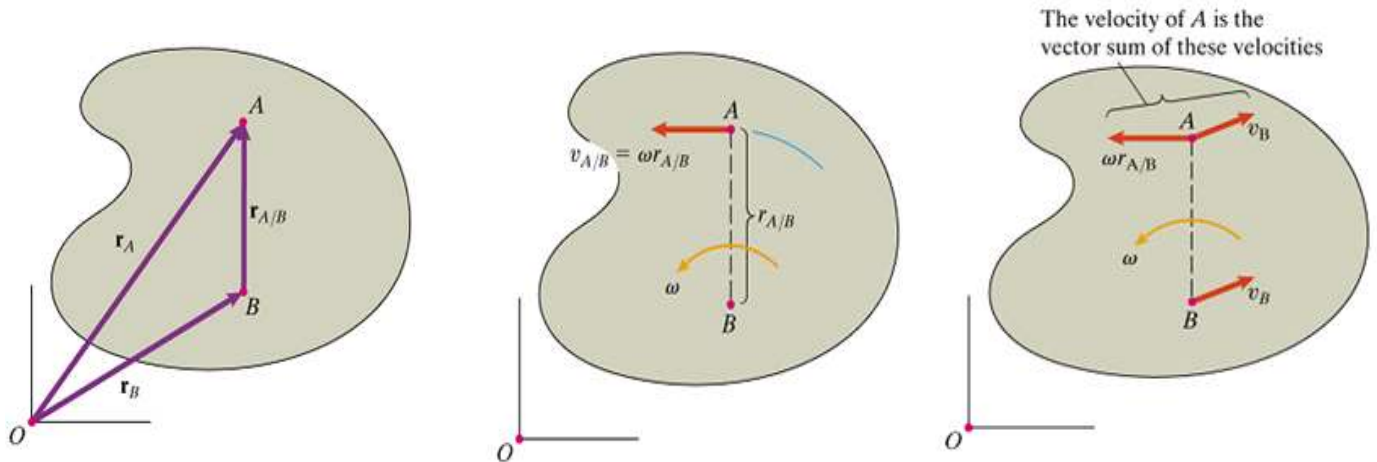


(3) 일반적인 평면운동

- 강체상의 점 A의 위치와 속도를 B의 위치와 속도, B에 대한 상대위치와 상대속도로 나타내면,

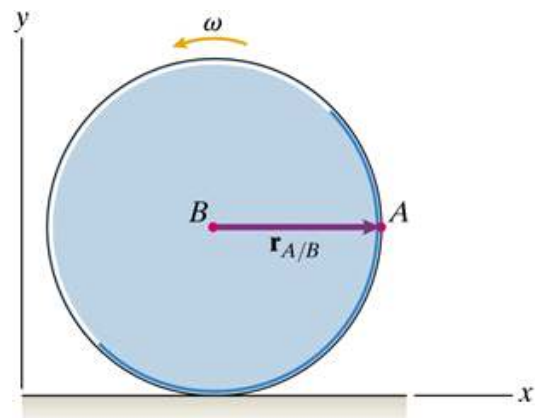
$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \Rightarrow \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$\mathbf{v}_{A/B}$: B에 대한 A의 상대속도(= $d\mathbf{r}_{A/B}/dt$)

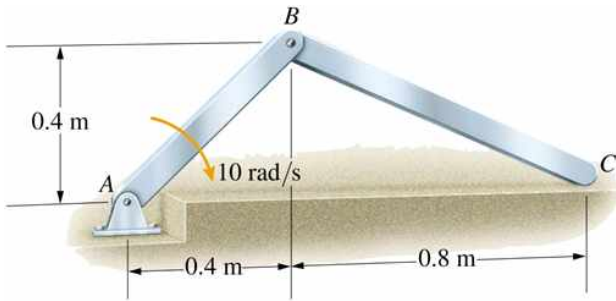


두 점 A와 B는 강체상의 점이므로 두 점 사이의 거리 $r_{A/B} = |r_{A/B}|$ 는 일정하며, 따라서 강체가 회전하면 A는 B에 대해 원형경로로 움직인다. 따라서 B에 대한 A의 상대속도는 원형경로에 접선방향이며 크기는 $r_{A/B} \omega$ 이다.

(연습) 그림과 같이 굴러가는 원판 위의 점 A의 속도를 구하시오.



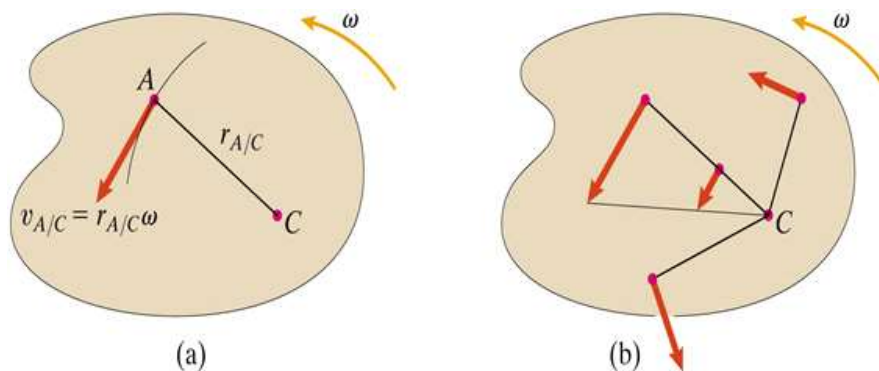
(연습) 막대 AB 가 10 rad/s 의 각속도로 시계방향으로 회전한다. 막대 BC 의 각속도와 점 C 의 속도를 구하라.



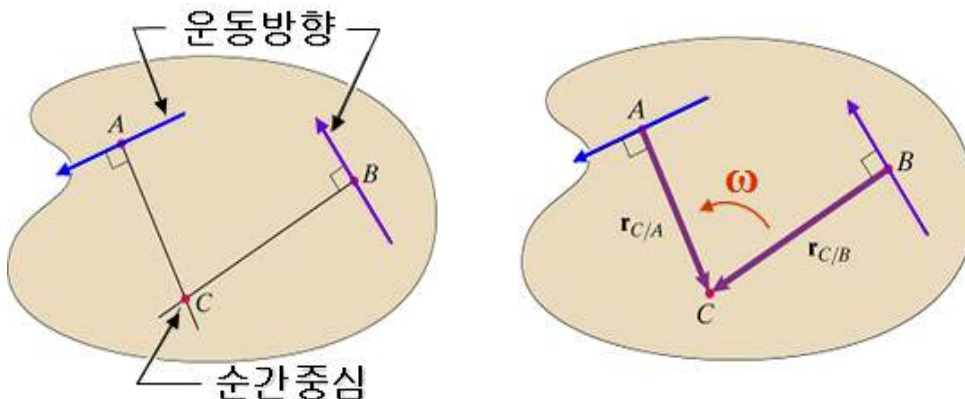
(4) 순간 중심(Instantaneous Center of **Zero Velocity**)

순간중심 : 어떤 순간에서 속도가 0인 강체의 한 점

2차원 운동을 하는 강체의 순간중심 위치를 알고 강체의 각속도를 알면, 다른 점들의 속도를 쉽게 구할 수 있다. 점 C 를 각속도 ω 로 회전하는 **강체의 순간중심**이라고 하자. 점 A 는 점 C 에 대해 원형경로로 움직이며, $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/C}$ 이다. 점 C 는 **현재 순간에서 속도가 0**이므로 결국 $\vec{v}_{A/C} = \vec{v}_A$ 이다. 현재 순간에서 강체의 모든 점은 C 에 대해 회전한다.



강체의 두 점 A 와 B 의 운동방향을 알고 있으며 두 방향이 평행하지 않으면, 점 A 와 B 의 운동방향에 수직이면서 두 점을 지나는 직선을 각각 그려 교차점 C 를 찾을 수 있다. 이 교차점 C 가 강체의 **순간중심**이다 :



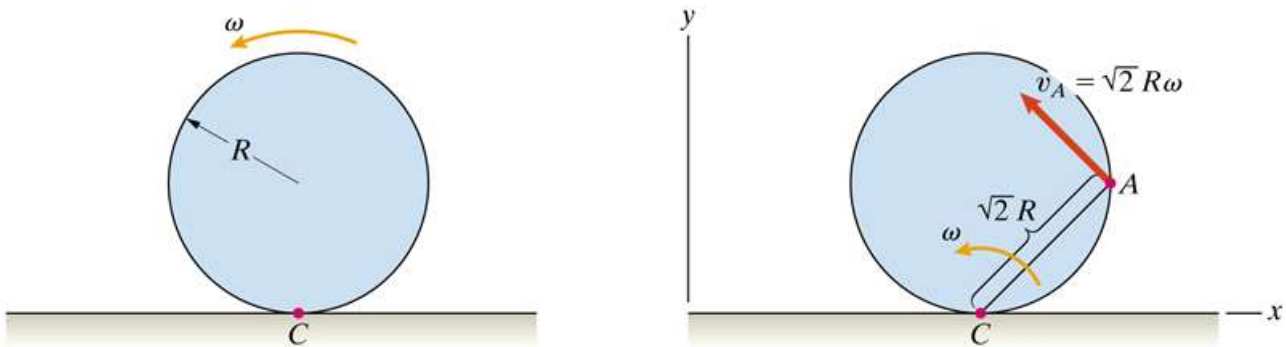
[증명] 점 C 의 속도가 0임을 보여주면 된다. 점 C 의 속도를 A 와 B 의 속도에 의해 나타내면,

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A}$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}$$

벡터 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A}$ 는 $\mathbf{r}_{C/A}$ 에 수직이므로 \mathbf{v}_C 는 A 의 운동방향과 평행이다. 벡터 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}$ 는 $\mathbf{r}_{C/B}$ 에 수직이므로 \mathbf{v}_C 는 B 의 운동방향과 평행이다. 이와 같은 상황을 만족하기 위해서는 결국 A 와 B 의 운동방향에 수직인 \mathbf{v}_C 의 성분은 모두 0이어야만 한다. 따라서 $\mathbf{v}_C = 0$ 이다.

(예제) 각속도 ω 로 굴러가는 반경 R 의 원판이 바닥과 접하는 점 C 는 그림의 순간에서 정지 상태이므로, 점 C 는 원판의 순간중심이다. 따라서 원판의 다른 임의의 점의 속도는 점 C 를 회전중심으로 하여 원운동을 하는 것처럼 생각해서 구할 수 있다. 예를 들면 점 A 의 속도는 다음 식과 같다 :

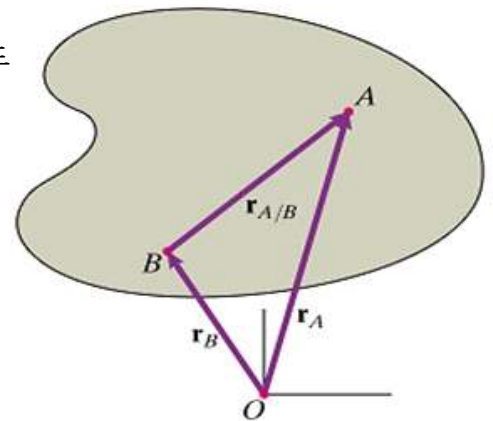


$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= -\sqrt{2}R\omega \cos 45^\circ \mathbf{i} + \sqrt{2}R\omega \sin 45^\circ \mathbf{j} \\ &= -R\omega \mathbf{i} + R\omega \mathbf{j} \end{aligned}$$

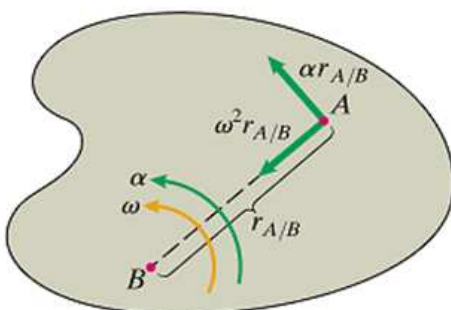
(5) 일반적인 운동에서의 가속도 해석

기준좌표계에 대해 평면운동을 하는 강체의 두 점 A 와 B 의 가속도 관계식

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \Rightarrow \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$



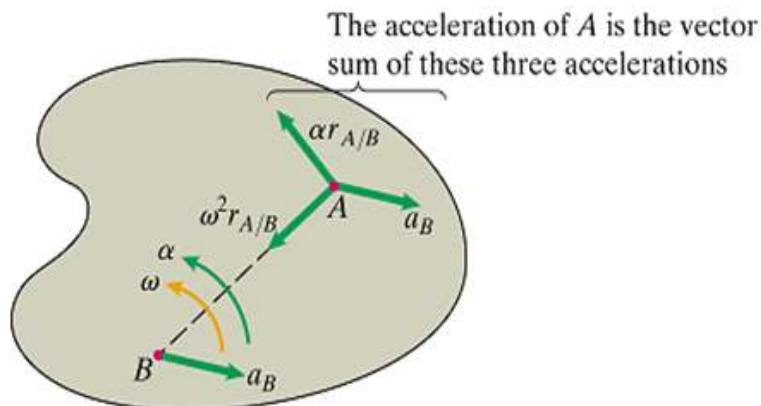
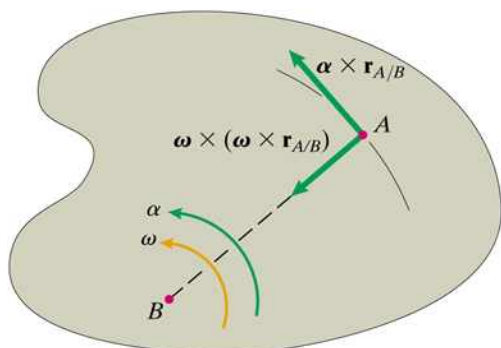
만일 B 가 고정 회전축일 경우 즉 $\mathbf{v}_B = 0$ 일 경우 A 점의 가속도는 아래와 같다.



$$\mathbf{a}_{A/B} = \begin{cases} a_t = |\mathbf{r}_{A/B}| \alpha \\ a_n = \frac{|\mathbf{v}_{A/B}|^2}{r_{A/B}} = r_{A/B} \omega^2 \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$\xrightarrow{\text{미분}} \mathbf{a}_{A/B} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A/B} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$



$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \Rightarrow \mathbf{a}_{A/B} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

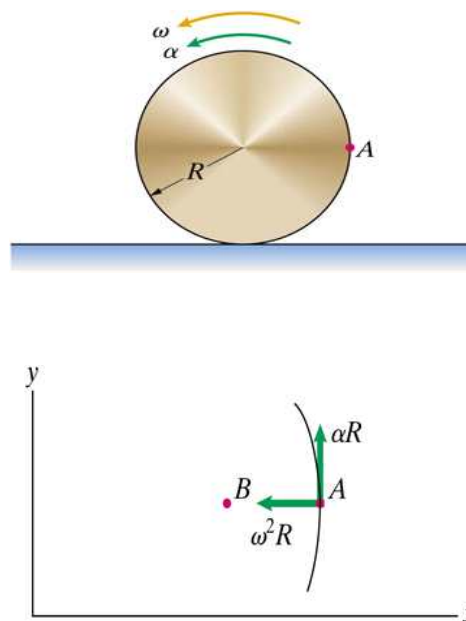
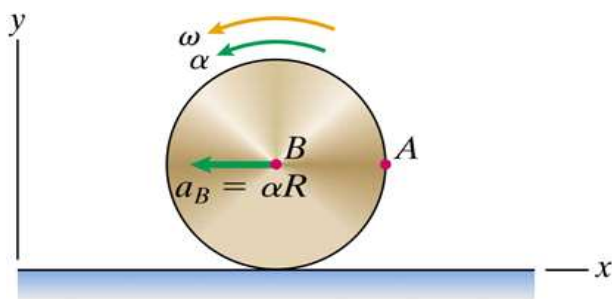
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$

<요점> 평면운동을 하는 강체 상의 두 점의 가속도 관계식 :

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{a}_{A/B} \text{의 접선성분}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})}_{\mathbf{a}_{A/B} \text{의 법선성분}}$$

$$= \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}$$

(예제) 원판이 반시계 방향의 각속도 ω 와 반시계 방향의 각가속도 α 로 굴러간다. 점 A의 가속도는 얼마인가?



$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{A/B} = R\mathbf{i} \quad \text{이므로}$$

$$\therefore \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}$$

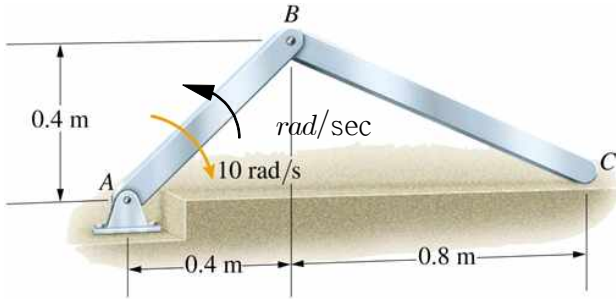
$$= -\alpha R \mathbf{i} + (\alpha \mathbf{k}) \times (R\mathbf{i}) - \omega^2 (R\mathbf{i}) = (-\alpha R - \omega^2 R) \mathbf{i} + \alpha R \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$

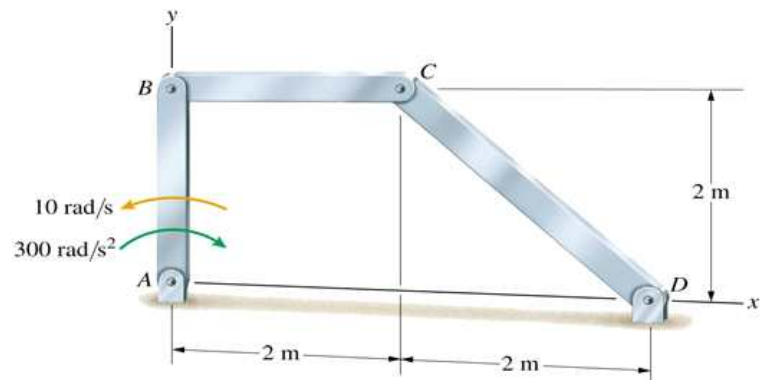
$$= -\alpha R \mathbf{i} - \omega^2 R \mathbf{i} + \alpha R \mathbf{j}$$

$$= (-\alpha R - \omega^2 R) \mathbf{i} + \alpha R \mathbf{j}$$

(연습) 막대 AB 가 10 rad/s 의 각속도(시계방향)와 2 rad/sec^2 (반시계 방향)의 각가속도로 회전한다.
 막대 BC 의 각가속도와 점 C 의 가속도를 구하라.



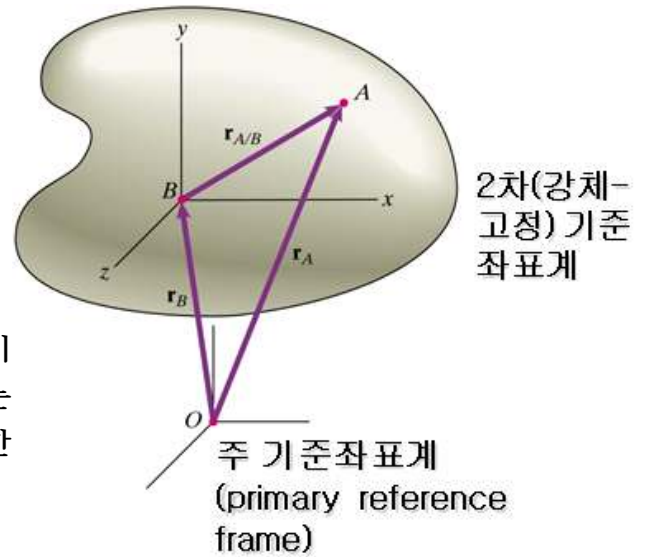
(예제) 막대 AB 가 10 rad/s 의 반시계 방향 각속도와 300 rad/s^2 의 각가속도를 가지고 있다. 막대 BC 와 CD 의 각가속도는 얼마인가?



(6) 강체 위에 움직이는 질점의 해석

강체 위에서 움직이는 점(강체에 대해 상대운동을 하는 점)의 운동에는 강체와 함께 움직이는 기준좌표계를 사용하는 것이 편하다. 이런 좌표계를 “**강체에 고정된 기준좌표계**”라고 한다.

원점이 O 인 **주 기준좌표계**는 강체의 운동을 기술하기 위한 것이며, 강체에 고정된 원점 B 의 기준좌표계 xyz 는 강체에 대해 상대운동을 하는 A 의 운동을 기술하기 위한 것이다.



O 에 대한 A 의 위치벡터 :
$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \underbrace{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}_{\mathbf{r}_{A/B}}$$

여기서 x, y, z 는 강체에 고정된 좌표계에서 바라본 A 의 좌표임.

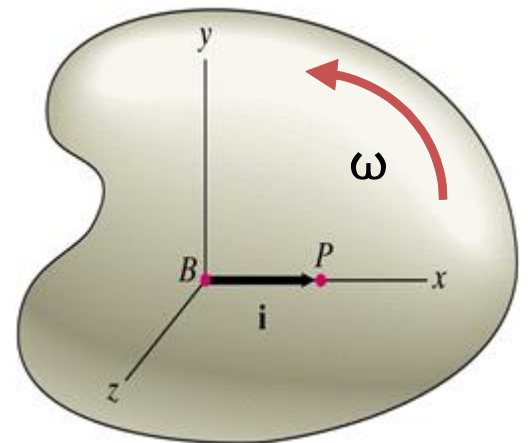
위치벡터를 미분하여 속도는 아래와 같다.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

※ 단위벡터 \mathbf{i} 를 점 B 에 대한 P 의 위치벡터라고 생각하면,
 \mathbf{i} 의 시간미분은 점 P 의 B 에 대한 상대속도 $\mathbf{v}_{P/B}$ 이므로

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \text{ 이다. 마찬가지로 단위벡터 } \mathbf{j} \text{와 } \mathbf{k} \text{의 미분도 다음과}$$

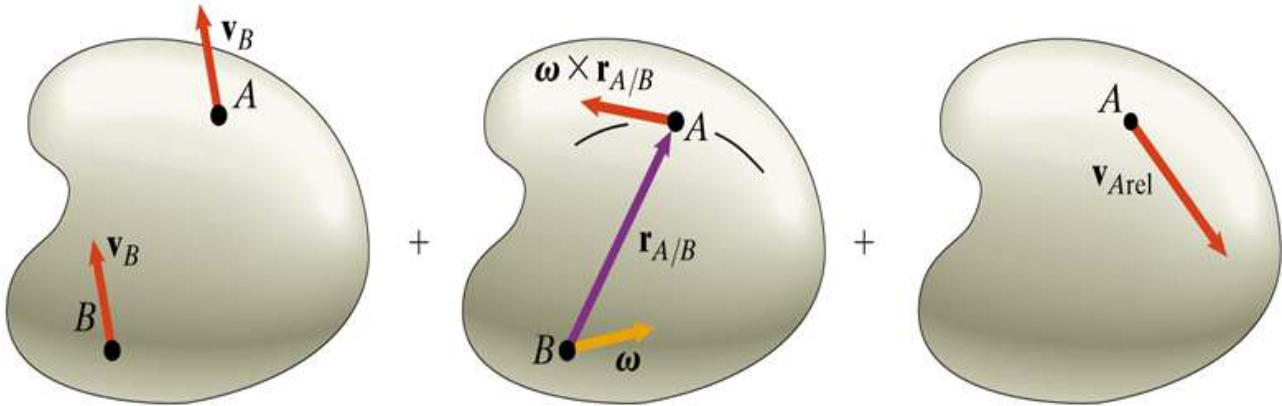
$$\text{같이 얻을 수 있다 : } \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$$



$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + x\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + y\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} + z\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \\ &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{Arel} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \mathbf{v}_B + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{v}_{A/B}} + \mathbf{v}_{Arel} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{Arel} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} : \text{강체에 고정된 좌표계에 대한, 즉 강체에 대한 } A \text{의 상대속도}$$

※ 강체에 대해 상대운동을 하는 점 A 의 주 기준좌표계에 대한 속도 \mathbf{v}_A 는 다음 그림과 같이 세 개의 항으로 구성되어 있다 :



강체(점 B)의 속도+강체회전에 의한 B 에 대한 A 의 상대속도 $\mathbf{v}_{A/B}$ +강체에 대한 A 의 상대속도 \mathbf{v}_{Arel}

강체 위에서 움직이는 점 A 의 가속도 식은 앞의 속도 식을 시간 미분하여 구한다 :

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right)$$

$$\therefore \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})}_{\mathbf{a}_{A/B}} + \mathbf{a}_{Arel} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{Arel}$$

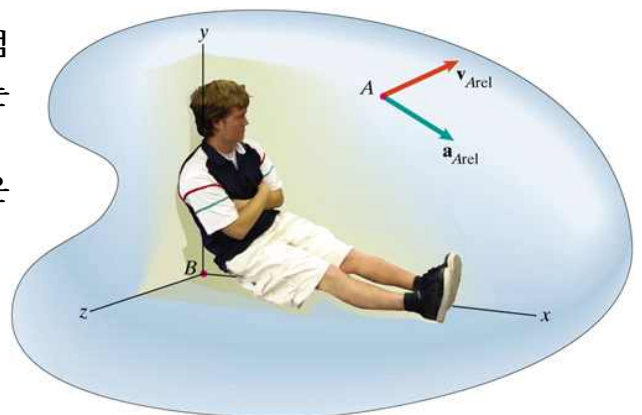
$$\mathbf{a}_{Arel} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$$

* \mathbf{a}_A 는 주 기준좌표계에 대한 A 의 가속도이며, \mathbf{a}_{Arel} 은 강체에 대한 A 의 상대 가속도이다 :

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{a}_{A/B}} + \mathbf{a}_{Arel} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{Arel}$$

<해석> \mathbf{v}_{Arel} 과 \mathbf{a}_{Arel} 은 강체에 고정된 좌표계에 대한 점 A 의 상대속도와 상대 가속도로서, 강체와 함께 움직이는 관측자가 측정한 속도와 가속도이다.

만일 점 A 가 강체에 고정된 점이라면 \mathbf{v}_{Arel} 과 \mathbf{a}_{Arel} 은 0이다.



(예제) 막대 AB가 2 rad/s 의 반시계 방향 각속도와 10 rad/s^2 의 반시계 방향 각가속도를 가지고 있다.

(a) 막대 AB의 홈에 대한 핀 A의 속도와 막대 AC의 각속도를 구하라;

(b) 막대 AB의 홈에 대한 핀 A의 가속도와 막대 AC의 각가속도를 구하라.

